Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа «Компьютерные технологии и информационные системы»

**Пояснительная записка**

**к курсовой работе**

**по теме «Исследование методов решения дифференциальных уравнений»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил:  студент гр. з5130902/20001 | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Рязанцев Д.Л. |
|  | <*подпись*> |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Руководитель:  ст. преподаватель | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Кузнецова Л. В. |
|  | <*подпись*> |  |

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2024 г.

Санкт-Петербург

2024

**Реферат**

Пояснительная записка к курсовой работе 23 с., 5 рис., 5 источников, 4 прил.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ, MATLAB, ПОГРЕШНОСТЬ, ГРАФИК, МЕТОДЫ, АДАМС-БАШФОРТ, РУНГЕ-КУТ

Объектом исследования является решение ОДУ различными методами с использованием программы Matlab.

Цель работы – решить ОДУ различными методами с использованием программы

Matlab.

Для достижения цели в процессе работы решались следующие задачи:

Решение ОДУ следующими методами:

1. Аналитически;
2. Методом из семейства методов Адамса-Башфорта 1 порядка;

При выполнении данного метода, также необходимо для заданного в соответствии

ОДУ:

* 1. Привести ОДУ к виду
  2. Построить разностную схему для решения ОДУ заданным методом
  3. Разработать алгоритм для решения ОДУ в соответствии с построенной разностной схемой и написать соответствующую программу в программном продукте MatLAB. Шаг сетки разностной схемы *h* установить таким образом, чтобы разностная схема сходилась (т.е. чтобы метод решения ОДУ был устойчив). В случае невозможности отыскания такого шага *h* (т.е. при неустойчивости заданного метода для конкретного ОДУ) необходимо подробно разъяснить причину и предложить вариант изменения условий таким образом, чтобы заданный метод для ОДУ стал устойчивым.

1. Методом Рунге-Кутта 4 порядка.

В результате исследования произвести построение графиков решений, сравнение

полученных результаты и исследование зависимости погрешности от выбора шага.

**Оглавление**:

Введение 4

1. Постановка задачи 5

2. Приведение ДУ к требуемому виду 6

3. Решение ДУ аналитически 7

4. Решение ДУ численными методами 9

4.1. Метод Адамса-Башфорта 1-го порядка 9

4.2. Метод Рунге-Кутты 11

5. Сравнение полученных решений 15

5.1. Расчет погрешностей 15

5.2. Исследование зависимости погрешности от шага 17

Заключение 18

Список литературы 19

Приложение 1. 20

Приложение 2. 21

Приложение 3. 22

Приложение 4. 23

# Введение

В наши дни люди часто сталкиваются с решением дифференциальных уравнений, например, при расчетах в электротехнике или радиотехнике. Обычно, это линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ). Одним из частных случаев линейных дифференциальных уравнений являются ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Все численные методы для решения линейных дифференциальных уравнений связаны с переходом от дифференциальной системы к разностной схеме и вычислением приближенных решений в форме сеточных функций.

Метод Адамса-Башфорта 2-го порядка был предложен английским астрономом математиком Джоном Курием Адамсом в 1855 году. Метод является экстраполяционным, и, в отличие от методы Рунге-Кутты использует для вычисления очередного значения искомого решения не одно, а несколько значений, которые уже вычислены в предыдущих точках.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка относится к группе явных методов. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой. Наиболее часто используется и реализован в различных математических пакетах классический метод Рунге-Кутты, имеющий четвертый порядок точности. Решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты является одним из самых распространённых численных методов решений в технике.

# Постановка задачи

Необходимо решить ОДУ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (1.1) |
|  | | | |

различными методами:

1. аналитически (или с использованием стандартной процедуры MATLAB dsolve);
2. методом из семейства методов Адамса в соответствии с вариантом;
3. методом Рунге-Кутта (стандартная процедура MATLAB - ode45).

Построить графики решений. Сравнить полученные результаты.

Исследовать зависимость погрешности от выбора шага.

Вариант № 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2) |

Из семейства методов Адамса требуется использовать метод Адамса-Мултона 2-го порядка.

# Приведение ДУ к требуемому виду

Для применения численных методов решения ОДУ, необходимо от ЛДУ третьего порядка (1.1) перейти к системе из ЛДУ первого порядка.

Введем новые переменные, чтобы представить исходное уравнение в виде системы уравнений.

Пусть

Тогда мы можем представить исходное ЛДУ третьего порядка (1.1) в виде системы из трех уравнений первого порядка:

Получаем дифференциальное уравнение вида:

где *А* – матрица состояния, а *B –* матрица управления.

# Решение ДУ аналитически

Для решения ОДУ (1.1) применяем программу (Приложение 1) с использованием стандартных методов MatLAB: *dsolve() и simplify().*

Получаем следующий результат:



Этому решению соответствует график (см. рис. 1)

A graph with a red line

Description automatically generatedРисунок 1 – Решение заданного ОДУ аналитически с использованием функции *dsolve*

Код программы и результат выполнения приведены в приложении 1.

# Решение ДУ численными методами

## Метод Адамса-Башфорта 1-го порядка

Из литературы известна расчетная формула для группы методов Адамса-Мултона:

Следовательно, для метода 1-го порядка расчетная формула имеет вид:

где:

* – значение искомой функции в следующей точке сетки,
* – значене искомой функции в текущей точке,
* - шаг сетки,
* – значение правой части ОДУ в текущей точке.

Выбор шага () для метода Адамса-Башфорта 1 порядка имеет важное значение, так как он влияет на точность и устойчивость решения. Слишком большой шаг приведет к уменьшению точности решения, а слишком маленький – к увеличению времени вычислений.

Алгоритм применения метода Адамса-Башфорта 1 порядка к уравнению:

1. Определение параметров: начального времени и , начальных условий и шага сетки .
2. Создание векторов для хранений значений времени и функции.
3. Определение функции f, которая преобразует ОДУ к виду
4. Применение метода для вычисления значений функции на каждом шаге сетки.
5. Вывод результатов в виде графика.

Данному решению соответствует график (см. рис. 1) и код программы (см. Приложение 2).

A graph with different colored lines

Description automatically generated

Рисунок 1 – Решение заданного ОДУ методом Адамса-Башфорта 1-го порядка

## Метод Рунге-Кутты

Разностная схема метода Рунге-Кутты 4-го порядка описывается формулами:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1) |

Решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка реализовано программой в Приложении 3.

Получено численное решение (см. таб. 1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6.0285e-05 | 3.0428e-14 | 1.5142e-09 | 5.0231e-05 |
| 0.00012057 | 2.4341e-13 | 6.0561e-09 | 0.00010045 |
| 0.0011454 | 2.0845e-10 | 5.4574e-07 | 0.0009521 |
| 0.0014468 | 4.1999e-10 | 8.7037e-07 | 0.0012018 |
| 0.022547 | 1.5531e-06 | 0.00020493 | 0.01788 |
| 0.030082 | 3.6582e-06 | 0.00036083 | 0.023468 |
| 0.08227 | 7.0819e-05 | 0.0025057 | 0.057424 |
| 0.1046 | 0.00014209 | 0.0039272 | 0.069701 |
| 0.12692 | 0.00024806 | 0.0056095 | 0.080808 |
| 0.3187 | 0.0032638 | 0.027749 | 0.14135 |
| 0.35429 | 0.004342 | 0.032897 | 0.14777 |
| 0.65216 | 0.021223 | 0.081667 | 0.17331 |
| 0.71354 | 0.026564 | 0.092356 | 0.17499 |
| 0.77491 | 0.032562 | 0.10313 | 0.176 |
| 1.1267 | 0.079758 | 0.16516 | 0.17527 |
| 2.0752 | 0.31314 | 0.32442 | 0.15951 |
| 2.2218 | 0.3624 | 0.3476 | 0.15673 |
| 3.5538 | 0.95677 | 0.53884 | 0.13016 |
| 3.7981 | 1.0922 | 0.56999 | 0.1251 |
| 4.0423 | 1.2351 | 0.59993 | 0.11986 |
| 4.2866 | 1.3852 | 0.62859 | 0.11463 |
| 4.9136 | 1.8009 | 0.69633 | 0.10133 |
| 5.0703 | 1.9113 | 0.71194 | 0.097991 |
| 5.227 | 2.0241 | 0.72704 | 0.094638 |
| 5.3838 | 2.1392 | 0.74161 | 0.091264 |
| 6.3395 | 2.8865 | 0.81904 | 0.070768 |
| 6.5703 | 3.0774 | 0.83479 | 0.065907 |
| 6.8011 | 3.2718 | 0.84943 | 0.061033 |
| 7.0319 | 3.4694 | 0.86296 | 0.056105 |
| 8.1754 | 4.4877 | 0.91358 | 0.032586 |
| 8.3276 | 4.6271 | 0.9183 | 0.029539 |
| 9.6797 | 5.8877 | 0.94048 | 0.0036512 |
| 9.897 | 6.0922 | 0.94085 | -0.00030497 |
| 10.114 | 6.2966 | 0.94036 | -0.0041873 |
| 11.164 | 7.2778 | 0.92655 | -0.021853 |
| 11.9 | 7.9529 | 0.90624 | -0.033151 |
| 12.101 | 8.1342 | 0.89929 | -0.036074 |
| 12.302 | 8.3141 | 0.89176 | -0.038919 |
| 13.628 | 9.4572 | 0.82861 | -0.055742 |
| 14.162 | 9.8915 | 0.79726 | -0.061564 |
| 14.34 | 10.032 | 0.78614 | -0.063366 |
| 15.104 | 10.614 | 0.7349 | -0.070406 |
| 15.309 | 10.763 | 0.72034 | -0.072112 |
| 16.594 | 11.626 | 0.62176 | -0.080733 |
| 17.886 | 12.361 | 0.51358 | -0.08622 |
| 18.051 | 12.444 | 0.49928 | -0.086651 |
| 19.11 | 12.924 | 0.40644 | -0.088418 |
| 19.297 | 12.999 | 0.38985 | -0.088535 |
| 20.801 | 13.485 | 0.25725 | -0.08726 |
| 22.068 | 13.742 | 0.14884 | -0.083494 |
| 22.229 | 13.765 | 0.1354 | -0.082878 |
| 23.281 | 13.862 | 0.050699 | -0.077963 |
| 24.331 | 13.873 | -0.02808 | -0.071855 |
| 25.726 | 13.767 | -0.12192 | -0.062386 |
| 26.698 | 13.62 | -0.179 | -0.055014 |
| 32.934 | 11.764 | -0.36356 | -0.0047511 |
| 33.614 | 11.516 | -0.36512 | 0.00012849 |
| 37.895 | 10.036 | -0.30896 | 0.023978 |
| 38.104 | 9.9727 | -0.30388 | 0.024778 |
| 38.312 | 9.91 | -0.29864 | 0.025551 |
| 39.279 | 9.6334 | -0.2723 | 0.028756 |
| 39.46 | 9.5846 | -0.26705 | 0.029278 |
| 39.641 | 9.5368 | -0.26171 | 0.029755 |
| 44.188 | 8.6821 | -0.11097 | 0.034081 |
| 44.362 | 8.6634 | -0.10507 | 0.033962 |
| 44.543 | 8.6449 | -0.09892 | 0.033836 |
| 46.094 | 8.5316 | -0.047769 | 0.031931 |
| 47.655 | 8.4947 | -0.00021155 | 0.02883 |
| 47.828 | 8.4951 | 0.004744 | 0.028434 |
| 48.001 | 8.4964 | 0.009633 | 0.02801 |
| 48.174 | 8.4985 | 0.014449 | 0.027578 |
| 50.036 | 8.5703 | 0.061189 | 0.022491 |
| 50.243 | 8.5835 | 0.065778 | 0.021861 |
| 50.45 | 8.5975 | 0.070237 | 0.021229 |
| 51.606 | 8.6921 | 0.092718 | 0.01764 |
| 51.783 | 8.7089 | 0.095797 | 0.017065 |
| 52.291 | 8.7596 | 0.10405 | 0.015438 |
| 52.456 | 8.7771 | 0.10656 | 0.014901 |
| 52.622 | 8.7949 | 0.10898 | 0.014364 |
| 54.743 | 9.0532 | 0.13221 | 0.0075671 |

Таблица 1 - Вывод программы при решении ОДУ методом Рунге-Кутты

Классический метод Рунге-Кутты имеет четвёртый порядок точности. Из полученных результатов по решению можно сделать вывод о том, что шаг в основном так же не сильно зависит от точности вычислений.

Данному решению соответствует график ) (см. рис. 2) и код программы (см. Приложение 3)

A graph with red line and blue line

Description automatically generated

Рисунок 2 – Решение заданного ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка

# Сравнение полученных решений

## Расчет погрешностей

Для методов Рунге-Кутты и Адама-Башфорта с использованием программы для расчета погрешностей (см. Приложение 4) были построены графики отличия от аналитического решения. Были сделаны следующие выводы:

На рисунке 4 и рисунке 5 изображены графики погрешностей методов Рунге-Кутты 4 порядка, метода Адамса-Башфорта 1 порядка с = 0.4, метода Адамса-Башфорта 1 порядка с = 0.2 и метода Адамса-Башфорта с . Как следует из графиков, метод Рунге-Кутты имеет наименьшую погрешность на всем выбранном интервале. Уменьшение коэффициента в методе Адамса-Башфорта 1 порядка приводит к уменьшению погрешности.

A graph with yellow lines and numbers

Description automatically generated

Рисунок 4 – Динамика погрешностей численных методов

A graph with colored lines and numbers

Description automatically generated

Рисунок 5 – Динамика погрешностей численных методов (увеличенный масштаб)

## Исследование зависимости погрешности от шага (для метода Адамса-Башфорта)

Исследование влияния шага вычислений на погрешность решения системы ЛДУ (2.3), продемонстрированное на рисунках 4 и 5, приводит к тем выводам, что для метода Адамса-Башфорта 1-го порядка увеличение шага приводит к увеличению погрешности.

# Заключение

В ходе данной работы:

* Закреплены знания по решению ЛДУ численными методами: методом Адамса-Башфорта 1-го порядка, стандартной процедурой ode45 и при помощи встроенной в MATLAB функции аналитического решения *dsolve*;
* реализована корректно работающая программа, которая строит графики решений (3мя способами) и необходимых погрешностей;
* Проведено исследование метода Адамса-Башфорта 1-го порядка с точки зрения влияния выбора шага на погрешность решения.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка показал себя лучше по сравнению с методом Адамса-Башфорта 1-го порядка, а у метода Адамса- Башфорта 1-го порядка сильное соотношения с размером шага, где при большом значении *h* график начинает сильно расходиться от аналитического.

Подробное рассмотрение зависимости погрешности от шага в методах Ругне-Кутта 4 порядка и Адамса-Башфорта 1 порядка показало, что увеличение шага увеличивает погрешность и при достаточно большом значении уменьшает устойчивость алгоритма.

В заключение, проведенное исследование показало, что метод Рунге-Кутта 4-го порядка является наиболее точным среди рассмотренных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако следует учитывать, что выбор метода зависит от специфики решаемой задачи, требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов. В некоторых случаях может быть целесообразным использовать комбинацию аналитических и численных методов для достижения наилучших результатов.

# Список литературы

1. Кирсяев А.Н., Куприянов В.Е. Вычислительная математика: конспект лекций. – СПб.: СПбГПУ, 2011. ­– 173 с.
2. Устинов С.М., Зимницкий В.А. Вычислительная математика. – СПб.: БХВ, 2009.- 336 с.
3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Борзенков А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в MATLAB: Конспект лекций для студентов всех специальностей БГУИР дневной формы обучения. – Минск: БГУИР, 2010.

# Приложение 1.

Код программы для решения ОДУ аналитически:



# Приложение 2.

Код программы для решения ОДУ методом Адамса-Башфорта 1-го порядка:



# Приложение 3.

Код программы для решения ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка:



# Приложение 4.

Код программы для отслеживания разницы между численными методами и аналитическим решением (с шагом *h*=1, и *2h*):

